

## Esercitazione di laboratorio di matematica

### Trasformazione di funzioni: dilatazione e compressione

**Obiettivo dell'esercitazione:** effettuare la dilatazione e compressione di una funzione utilizzando il programma applicativo derive.

**Teoria:** Studiamo la trasformazione di un punto  $P(x,y)$  nel punto  $P'(x',y')$  secondo le seguenti equazioni:

$$(1) \quad \begin{cases} x'=ax \\ y'=by \end{cases}$$

Se per esempio  $a=2$  e  $b=4$  la (1) diventa:

$$(2) \quad \begin{cases} x'=2x \\ y'=4y \end{cases}$$

Vediamo cosa accade per i punti

$$P_1(0;0), P_2(1;1), P_3(2;3)$$

applicando la trasformazione (2), otteniamo:

$$P'_1(0;0), P'_2(2;4), P'_3(4;12)$$

Notiamo che il punto  $P_1$  e' rimasto inalterato.

Vogliamo ora calcolare l'espressione di una funzione  $y = f(x)$  sottoposta alla trasformazione descritta dalle equazioni (1), cioe' vogliamo trovare l'espressione:

$$(3) \quad y' = f(x')$$

Per far questo risolviamo la (1) rispetto alla coppia  $(x,y)$ , troviamo:

$$(4) \quad \begin{cases} x = \frac{x'}{a} \\ y = \frac{y'}{b} \end{cases}$$

andiamo quindi a sostituire le  $(x,y)$  nella funzione di partenza  $y = f(x)$  ed eseguendo dei calcoli algebrici troviamo l'espressione nella forma (3), cioe' l'espressione della funzione che ha subito la trasformazione descritta dalla (1).

#### **Modalita' operative:**

##### Trasformazione di un punto:

Consideriamo il punto  $P(1,2)$  e le equazioni di trasformazione:

$$\begin{cases} x'=2x \\ y'=3y \end{cases}$$

otteniamo il punto P'(2,6)

Eseguiamo con derive i seguenti passaggi:

1. Definiamo il punto P:  $p := [[1, 2]]$
2. Grafichiamo il punto P
3. Definiamo il punto Q (P'):  $q := [[1*2, 2*3]]$
4. Grafichiamo il punto trasformato

Trasformazione di una funzione:

Consideriamo la funzione  $y = x^2$  e le equazioni di trasformazione:

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 3y \end{cases}$$

otteniamo la funzione traslata  $y' = \frac{3}{4} x'^2$

Eseguiamo con derive i seguenti passaggi:

1. Definiamo la funzione  $y = x^2$ :  $y := x^2$
2. Grafichiamo la funzione y
3. Definiamo il sistema di equazioni della traslazione:  
 $SOLVE([u = 2x, w = 3y], [x, y])$

N.B. Al posto della coppia(x',y') utilizziamo (u,w)

4. Eseguiamo il calcolo con: "Semplifica base", otteniamo:  
 $[x = u/2 \wedge y = w/3]$   
Questa e' il sistema (4) che ci serve per trovare l'espressione della funzione trasformata.
5. Sostituiamo alla funzione di partenza il risultato ottenuto:  
 $w/3 = (u/2)^2$
6. Grafichiamo la funzione w (cioe' y')

Esaminando il grafico osserviamo che sono presenti sul piano cartesiano due funzioni: la y e la sua traslata w (cioe' y')

**Problema:**

Eseguire le trasformazione dei seguenti punti date l'equazioni di trasformazione:

- a) P(0,0), P(-1,-2), P(2,4)  $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$
- b) P(0,0), P(-1,-2), P(2,4)  $\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y \end{cases}$
- c) P(0,0), P(-1,-2), P(2,4)  $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = y \end{cases}$
- d) P(0,0), P(-1,-2), P(2,4)  $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases}$
- e) P(0,0), P(-1,-2), P(2,4)  $\begin{cases} x' = -x \\ y' = 2y \end{cases}$
- f) P(0,0), P(-1,-2), P(2,4)  $\begin{cases} x' = 0x \\ y' = 0y \end{cases}$

Eseguire le trasformazioni delle seguenti funzioni date l'equazioni di trasformazione:

$$\begin{aligned}
 \text{g) } y=x^2-2 & \quad \left\{ \begin{array}{l} x'=x \\ y'=y \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} x'=x \\ y'=2y \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} x'=2x \\ y'=y \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} x'=2x \\ y'=2y \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} x'=-x \\ y'=2y \end{array} \right\} \\
 \text{h) } y=x+2 & \quad \left\{ \begin{array}{l} x'=x \\ y'=y \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} x'=x \\ y'=2y \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} x'=2x \\ y'=y \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} x'=2x \\ y'=2y \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} x'=-x \\ y'=2y \end{array} \right\} \\
 \text{i) } y=\sin(x) & \quad \left\{ \begin{array}{l} x'=x \\ y'=y \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} x'=x \\ y'=2y \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} x'=2x \\ y'=y \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} x'=2x \\ y'=2y \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} x'=-x \\ y'=2y \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

Riportate sul vostro foglio i punti e le funzioni ottenute ed i loro grafici e tutti i commenti che ritenete opportuni.