

Esercitazione di laboratorio di matematica

Metodi numerici per la risoluzione di equazioni differenziali ordinarie

Obiettivo dell'esercitazione: risolvere numericamente le equazioni differenziali ordinarie (ODE) mediante il metodo di Runge-Kutta del IV ordine.

Problema: si abbiano 4 equazioni differenziali ordinarie del primo ordine, si vuole trovare la soluzione di queste equazioni utilizzando i metodi numerici appresi a lezione.

Scopo dell'esperienza:

Lo studente deve valutare numericamente le soluzioni di 4 ODE del primo ordine utilizzando i metodi appresi in classe, di tutte sarà nota la soluzione.

La soluzione fornita dall' algoritmo sarà un grafico che verrà raccolto sotto forma tabellare.

Per ogni equazione si dovranno costruire i seguenti insiemi di tabelle:

N: indica il numero di iterazioni. Si consiglia di prendere in considerazione potenze del 10, quindi

$$N = \{10, 100, 1000, \dots, 10^5, 10^6, \dots\}.$$

Per ogni N si costruirà una tabella (Tab.1) definita nel seguente modo:

x : indica il valore dell'ascissa della soluzione trovata

y : indica il valore dell'ordinata della soluzione trovata

Δ : indica l'errore vero della soluzione secondo la formula $\Delta = |y_v - y|$ dove y_v è il valore vero dell'ordinata della soluzione.

x	y	Δ
....

Tab.1

A partire da queste tabelle si costruiranno i seguenti grafici:

1. grafico cartesiano delle soluzioni mettendo a confronto la "soluzione vera" con la soluzione stimata indicando chiaramente a quale N si fa riferimento.
2. grafico dell'errore indicando chiaramente a quale N si fa riferimento.

In definitiva per un'equazione, se si considera $N = \{10, 100, 1000, \dots, 10^5, 10^6, 10^7\}$ verranno costruiti 7 grafici della soluzione e 7 grafici dell'errore. In totale $14 \times 4 = 56$ grafici.

Ognuna di queste tabelle dovrà avere 100 righe (tranne nel caso di $N=10$), perchè per effettuare un grafico comprensibile 100 punti sono più che sufficienti. Ovviamente i punti andranno scelti equidistanziati tra di loro per non falsare il grafico della soluzione.

Per il lavoro con il foglio di calcolo elettronico si raccomanda:

1. Tutte le tabelle deve essere riportata sul foglio di calcolo elettronico.
2. Visto il numero totale dei grafici non è necessario stamparli, per chiarezza espositiva ogni ad ogni grafico deve essere dato un nome identificativo (indicarlo p.e. sopra il grafico stesso). Nell'analisi dei risultati verrà riportato il nome identificativo quando si analizzerà quel particolare grafico.
3. Deve essere presente il titolo del grafico
4. Deve essere presente i nomi degli assi e il loro ordinamento

Strumenti: linguaggio di programmazione python, foglio di calcolo elettronico, fogli di carta in formato A4, stampante, word processor.

Consegna: lo studente deve consegnare entro e non oltre la data stabilita:

1. La relazione deve essere scritta utilizzando il word processor Microsoft Word e stampata su fogli in formato A4 o , in alternativa, scritta su un foglio protocollo a quadretti.
2. La relazione deve seguire lo schema illustrato nel documento: “Come scrivere la relazione di un'esperienza di laboratorio”.
3. Il quarto punto della relazione: Analisi dei risultati deve contenere:
 - a) I 56 grafici richiesti riportati in un documento del foglio di calcolo e salvati sull'area e/o su una pen-drive.
 - b) Le 56 tabelle utilizzate riportanti il titolo , le unità di misura (se necessarie) e il nome di ciascuna colonna della tabella riportati in un documento del foglio di calcolo e salvati sull'area e/o su una pen-drive.
 - c) Un commento per ogni grafico riportato in cui si evidenzia l'andamento del grafico in relazione ai parametri in gioco ed all'andamento teorico, eventuali scostamenti dall'andamento teorico e quant'altro possa emergere.
 - d) Nella trattazione prova a rispondere ai seguenti quesiti:
 - i. Esaminando le tabelle ed i grafici a tua disposizione cosa si può dedurre a riguardo dell'andamento dell' errore dei risultati rispetto al variare del numero di iterazioni (n)? I risultati confermano la teoria? Esistono delle eccezioni?
 - ii. Che criterio hai utilizzato per comprendere quanto il tuo algoritmo fossero “affidabili”?
 - iii. Esaminando le tabelle ed i grafici a tua disposizione noti qualche andamento “particolare” a riguardo dell'errore o della soluzione dell'equazione (p.e. andamenti oscillatori) ? Se si, come lo spieghi?
 - iv. Esaminando le tabelle ed i grafici a tua disposizione cosa si può dedurre a riguardo dell'andamento dell'errore lungo tutto il dominio della soluzione? I risultati confermano la teoria? Esistono delle eccezioni?
 - e) Quant'altro possa essere rilevante per una completa comprensione della teoria, dell'algoritmo di calcolo e dei risultati ottenuti.

Durata: 8 ore di lezione .

Si ricorda che:

- Il lavoro è **individuale**.
- **Dopo 4 ore** di lavoro (cioè tra la fine del secondo giorno e l'inizio del terzo giorno di lavoro) verrà eseguita una **verifica** dei programmi scritti **con** relativa **valutazione**.
- **Il giorno della consegna si deve avere l'elaborato già stampato**, quindi nei giorni precedenti la consegna lo studente deve adoperarsi per la stampa della relazione e dei grafici allegati.
- La relazione deve riportare nome,cognome e classe dello studente, compagni di gruppo e data di consegna.
- Ogni eventuale grafico e tabella deve riportare nome,cognome e classe dello studente.